Felipe Luis Sterquino Itaborai

Matching Theory e o acesso dos estudantes às instituições de ensino, com uma aplicação ao novo sistema SISU no Brasil

Brasília

2013

Felipe Luis Sterquino Itaborai

Matching Theory e o acesso dos estudantes às instituições de ensino, com uma aplicação ao novo sistema SISU no Brasil

Monografia apresentada como requisito para obtenção do grau de Bacharel no Curso de Ciências Econômicas no Departamento de Economia da Universidade de Brasília

Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Orientador: Maurício Soares Bugarin

Brasília
2013

Felipe Luis Sterquino Itaborai

Matching Theory e o acesso dos estudantes às instituições de ensino, com uma aplicação ao novo sistema SISU no Brasil

Monografia apresentada como requisito para obtenção do grau de Bacharel no Curso de Ciências Econômicas no Departamento de Economia da Universidade de Brasília

Trabalho aprovado. Brasília, 15 de julho de 2013

Maurício Soares Bugarin

Orientador

Gil Riella

Membro

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família por sempre me apoiarem, principalmente aos meus pais, Fernando e Fabiany, que sempre acreditaram e investiram na minha educação e por todo amor, carinho e suporte dado. Agradeço também a minha irmã Fernanda por ser sempre este doce de pessoa. Serei imensamente grato também a minha tia Olga e minhas primas Jordana e Débora, que sempre estiveram presentes na minha vida.

Agradeço aos meus amigos, colegas de curso e aos membros da Econsult, que tanto me ensinaram ajudaram na minha formação.

Agradeço aos professores da Universidade de Brasília, que me forneceram um ensino de altíssimo nível. Em especial, ao meu orientador Maurício Bugarin, que sempre me incentivou e tornou este trabalho possível; ao professor Gil Riela, que me iniciou no estudo de Teoria dos Jogos nas aulas de microeconomia; e ao professor Pedro Zuchi, pelo grande apoio e confiança.

Toda a minha gratidão a todos que contribuíram para a realização deste trabalho. Além dos nomes supracitados, preciso agradecer ao Departamento Internacional da UnB, que possibilitou a minha estadia na Suécia, à Universidade de Estocolmo, que me ofereceu uma experiência iniqualavel e me colocou em contato com a Teoria dos Matchings, e ao professores Guillaume Haeringer, Orhan Aygun e Yan Chen que responderam meus emails e esclareceram algumas dúvidas.

“A melhor maneira de nos prepararmos para o futuro é concentrar toda a imaginação e entusiasmo na execução perfeita do trabalho de hoje”

Dale Carnegie

Resumo

O presente trabalho busca estudar a Teoria dos Matchings com ênfase no processo de seleção de alunos em universidades. O Brasil recentemente criou uma plataforma online que busca fazer este tipo de processo, chamado de Sistema de Seleção Unificado, o SISU. Descrevemos o funcionamento do SISU e dos mecanismos usados na literatura, comparando as diferenças encontradas, com o objetivo de propor modificações que possam contribuir para o aprimoramento deste mercado.

Abstract

This work studies the Matching Theory, emphasizing the process of selecting students for universities. Brazil recently created an online platform to do such a thing, called Sistema de Seleção Unificado, the SISU. We describe how SISU and the other mechanisms used in the literature work, comparing the differences, in order to propose changes that might contribute to develop this market.

Sumário

1 Introdução

Desenvolvimento é uma das questões mais discutidas na sociedade. É um conceito bem abrangente, que envolve não só o crescimento econômico, mas também a qualidade de vida, os direitos humanos e outros conceitos sociais.

Amartya Sen (1999) define desenvolvimento como liberdade. Portanto, o desenvolvimento consiste na remoção das várias restrições que impedem que as pessoas façam suas próprias escolhas, baseadas em seus próprios gostos e interesses. Para o autor, um processo que aumenta a liberdade de escolha da sociedade está contribuindo para o desenvolvimento da mesma. Por exemplo, a liberdade de seguir alguma religião sem correr o risco de ser perseguido ou a liberdade de determinado indivíduo, independentemente de sua etnia ou convicção política, de receber oportunidades para sua carreira são conquistas alcançadas por diversos países que também podem ser definidas como desenvolvimento.

Neste contexto, trataremos da liberdade de escolha de cada indivíduo na área de educação. Todos os anos, milhares de alunos buscam uma vaga nas universidades públicas brasileiras. Como o número de vagas disponíveis é muito menor do que o número de candidatos é importante que o processo de seleção seja justo, meritocrático e que se alinhe com as preferências dos candidatos.

O processo seletivo utilizado pelas universidades brasileiras foi se adaptando nas últimas décadas e culminou no atual Sistema de Seleção Unificada, o Sisu. Este sistema é gerenciado pelo Ministério da Educação e as inscrições são feitas *online*. Na edição de 2013, houve 1.949.958 inscritos para 129.279 vagas disponíveis.

Uma importante inovação desta nova plataforma é que ela permite que os alunos se candidatem para vagas em locais distantes de sua residência, o que era muitas vezes impossível na metodologia anterior. Desta forma, a criação deste novo sistema representa um aumento da liberdade de escolha dos participantes.

Entretanto, é preciso um estudo mais aprofundado para avaliar a eficácia do novo sistema. A ferramenta utilizada para análise se concentra no campo da Teoria dos Jogos, uma área da matemática muito utilizada nas ciências sociais. Esta teoria analisa as possíveis estratégias que podem ser tomadas por cada indivíduo envolvido e seus respectivos incentivos a atuarem de tal forma.

Existe um tipo de mercado muito específico no qual o mercado de seleção de alunos está incluído, o *two-sided matching market* (mercado de *matching* de dois lados), que é estudado pela Teoria dos Jogos. Nesse mercado específico, existem dois tipos de agentes distintos e cada agente deve se juntar com um agente do tipo oposto.

Muitos mercados podem ser classificados como mercados de *matching*. Uma característica comum nestes mercados é que muitas vezes o dinheiro não pode ser utilizado como meio de troca, geralmente por motivos éticos e culturais, e por isso novos mecanismos devem ser propostos para conseguir uma alocação que maximize o bem-estar social. Tratam-se dos mercados de matching sem pagamento lateral.

A literatura econômica só recentemente deu maior importância para este tipo de mercado. Os primeiros modelos eram bem mais teóricos, descrevendo mercados de troca de casas e de propostas de casamento entre homens e mulheres, como o modelo de Gale e Shapley (1962). Tempos depois surgiram novos modelos que de fato puderam ser aplicados no mundo real e tornou-se claro a importância e o impacto positivo que esta teoria pode causar, como o mecanismo de alocação de novos médicos para residências em hospitais, mecanismos de troca de rins (aqui vemos claramente a barreira ética sobre a possibilidade de comprar e vender órgãos humanos), mecanismos de contratação de empresas e alocações de alunos em escolas/universidades.

Deste modo, o objetivo principal deste trabalho é avaliar o funcionamento do Sistema de Seleção Unificada do Governo Federal à luz da Teoria dos Jogos, considerando os incentivos que este mecanismo deve gerar nos participantes. O trabalho está divido em quatro partes, além desta introdução. Primeiro, discutimos o que há na literatura de *two-sided matching* e os modelos que podem ser usados na seleção de alunos, escolhendo um deles como aquele que seria ideal para a utilização no mercado brasileiro. Na próxima seção, tratamos de expansões ao modelo escolhido que se fazem necessárias para adaptá-lo ao cenário brasileiro. Na terceira seção, fazemos uma análise histórica dos processos de seleção de alunos no Brasil ao longo dos anos e do modo de funcionamento do Sisu. Por fim, fazemos uma comparação do modelo ideal com o modelo usado no Sisu, apresentando os pontos de aperfeiçoamento que o Sisu poderia adotar.

2 Introdução ao estudo de Matching

2.1 Teoria de matching

A teoria de matching tem sua origem no artigo de Gale e Shapley (1962) e foi aplicada em diversos setores da economia, dentre eles o mercado de casamentos, a corrente de doação de órgãos e a seleção de alunos para ingresso em escolas e de médicos residentes para ingresso em hospitais. Um fato predominante nestes exemplos é que eles são sempre formados por dois grupos finitos e distintos (marido e mulher, doador e paciente, aluno e escola, médico e hospital) e por isso são chamados de *two-sided matching markets*. A possibilidade de indivíduos de grupos opostos formarem parcerias, os *matchings*, torna este tipo de mercado muito interessante no contexto de Teoria dos Jogos.

O modelo de *two-sided matching* mais conhecido é o modelo do casamento. De maneira mais formal, usaremos o modelo de casamento (Marriage model) apresentado em Roth e Sotomayor (1990). Em certa comunidade, temos dois grupos distintos M e W, para homens e mulheres respectivamente: $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ e $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$.

Cada um deles possui uma lista de preferência sobre os integrantes do sexo oposto e deve procurar o melhor parceiro possível para se casar. A preferência de um participante homem denotado genericamente por *m* pertence ao conjunto *W* U {*m*} a preferência de uma mulher *w* pertence ao conjunto *M* U {*w*}, pois cada um pode preferir ficar sozinho a se casar com alguém, o que é representado matematicamente quando um participante aloca-se consigo mesmo. Por exemplo, se a preferência de um homem *m* é $P(m) = \{w_1, w_2, m,\ w_3, \dots, w_p\}$, então ele gostaria de se casar com w_1, mas caso não seja possível ele se casaria com w_2 e todas as demais são inaceitáveis em qualquer cenário. A notação de preferência pode ser simplificada e incluir apenas os indivíduos aceitáveis (no exemplo acima ficaria $P(m) = \{w_1, w_2\}$) sem prejuízo de informação relevante. O conjunto de preferências é denominado *P*, formando um jogo com 3 elementos $J = (M, W, P)$. Em um mercado com dois homens e duas mulheres, por exemplo, o jogo poderia ser representado por:

Exemplo 2.1.1- O jogo $J = (M, W, P)$ abaixo é formado por dois homens e duas mulheres cujas preferências são tais que o primeiro homem apenas aceita a segunda mulher, o segundo homem prefere a primeira mulher mas também aceitarei a segunda caso não conseguisse a primeira, a primeira mulher prefere o primeiro homem mas também aceitaria o segundo caso não conseguisse o primeiro e a segunda mulher aceita apenas o primeiro homem.

$$J = ((m_1, m_2), (w_1, w_2), \big((w_2, m_1, w_1), (w_1, w_2, m_2), (m_2, m_1, w_1)(m_1, w_2, m_2)\big))$$

Que pares pode-se esperar que sejam formados num ambiente de *matching*? No caso acima, a solução é bem simples e direta. Como m_1 quer ficar com w_2 e o sentimento é recíproco, e o mesmo acontece com m_2 e w_1, não há conflito na seleção dos parceiros. O *matching μ* é o conjunto de casais formado dentro de *J.* Se tivermos $\mu(m_1) = \ (w_2)$, então m_1 se casou com w_2 e o inverso seria a mesma alocação. Se algum integrante preferir ficar só então o *matching* é ele mesmo, como em $\mu\big(w_j\big) = \big(w_j\big)$. Porém, na maioria dos casos a solução não é tão óbvia. Em outros cenários, a quantidade de matchings dentro de J pode ser enorme, como no exemplo abaixo:

Exemplo 2.1.2 – Considere o seguinte jogo em que M=(*α,β,γ*), W=(A,B,C). Este jogo possui 6 combinações possíveis, ou 6 matchings, independente das preferências dos jogadores. Apresentado na forma matricial, como em Roth e Sotomayor (1990), temos:

$$\mu_1 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{matrix} \qquad \mu_4 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ B & C & A \end{matrix}$$

$$\mu_2 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & C & B \end{matrix} \qquad \mu_5 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ C & B & A \end{matrix}$$

$$\mu_3 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ B & A & C \end{matrix} \qquad \mu_6 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ C & A & B \end{matrix}$$

Destas 6 soluções, qual é a mais adequada? Isto não é possível dizer no momento, pois não há informação suficiente para obter a melhor solução. Por isso, algum critério deve ser usado para determinar a solução do mercado. Consequentemente, precisamos da lista de preferências e de utilizar o seguinte critério:

Definição 2.1.1 – Estabilidade no Marriage Model: O mercado de casamentos será estável quando não houver um homem e uma mulher que não estejam casados entre si, mas cuja união seria preferível para ambos ao invés de seus atuais parceiros.

Esta definição é importante porque garante que não haja divórcios no modelo. Se o matching é instável, então pelo menos um homem e uma mulher vão buscar um divórcio com seus respectivos parceiros e vão se unir logo depois. Dessa forma, não é interessante buscar matchings instáveis, uma vez que não se espera que perdurem no tempo. Vamos, então, analisar o mesmo exemplo, acrescentando a lista de preferências:

Exemplo 2.1.3 – Considere o seguinte jogo em que M=(α,β,γ), W=(A,B,C) e P=((A,B,C), (B,C,A), (C,A,B), (β,γ,α), (γ,α,β), (α,β,γ)). De novo temos os seguintes matchings:

$$\mu_1 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{matrix} \qquad \mu_4 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ B & C & A \end{matrix}$$

$$\mu_2 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & C & B \end{matrix} \qquad \mu_5 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ C & B & A \end{matrix}$$

$$\mu_3 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ B & A & C \end{matrix} \qquad \mu_6 = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ C & A & B \end{matrix}$$

Agora levando em consideração as preferências, geramos 3 resultados instáveis. Em μ_2, γ está casado com B e A está casada com α, mas o casamento entre γ e A é preferível para ambos. Em μ_3, β está casado com A e C está casada com γ, mas o casamento entre β e C também é preferível para ambos. Por fim, em μ_5, α está casado com C e B está casada com β, mas o casamento entre $\propto$ e B também é preferível para ambos.

Os demais resultados são estáveis. Em μ_1, todos os homens estão recebendo sua primeira opção e, logo, nenhum estará disposto a trocar. O mesmo acontece pelo lado oposto em μ_6, em que todas as mulheres recebem a primeira opção. Por fim, μ_4 é estável porque todos os integrantes recebem a segunda opção e devido à simetria existente no exemplo, não é há trocas que beneficiam dois lados ao mesmo tempo.

Portanto, o conceito de estabilidade nos permitiu reduzir o escopo de previsão dos matchings que poder vir a ser formados. No entanto, ainda existem 3 matchings estáveis. Sendo assim, qual é o melhor matching estável? Isto não pode ser respondido no exemplo acima com o instrumental teórico que desenvolvemos até o momento. A solução final pode depender, por exemplo, do cenário externo em que este exemplo está submetido. Pode ser que tal exemplo ocorra em uma sociedade totalmente machista e a solução previsível consequentemente seria a alocação estável ótima para os homens (μ_1). Por outro lado, em outras culturas, pode ocorrer que μ_4 ou μ_6 sejam mais adequadas.

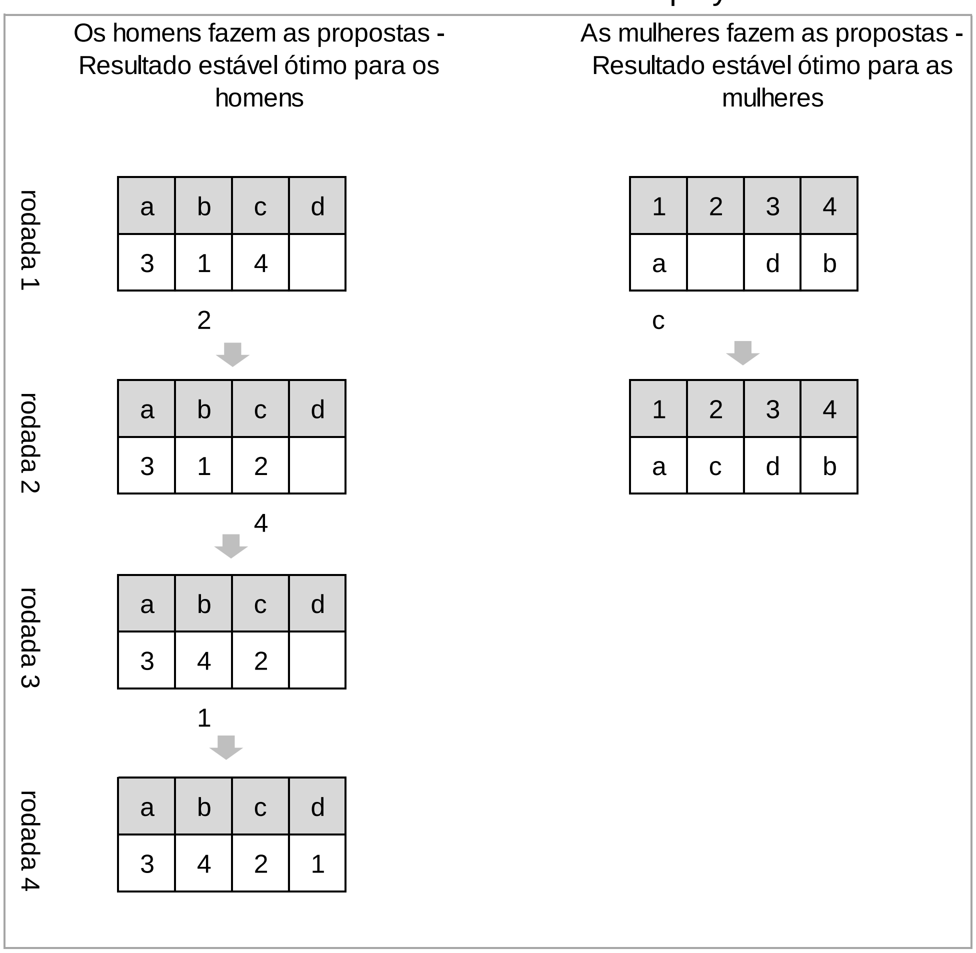
Porém, o exemplo 2.1.3 é muito simples se ser resolvido. Geralmente não é tão simples visualizar os *matchings* estáveis. Então, Gale e Shapley propuseram um mecanismo que gera um *matching* estável. O mecanismo, chamado de “Deferred Acceptance Algorithm”, ou ainda algoritmo do aceite temporário, funciona da forma descrita a seguir.

O mecanismo de Gale e Shapley é resolvido por diversas rodadas e, primeiramente, cada integrante lista suas preferências. Um dos lados faz uma proposta de casamento para aquele integrante em primeiro lugar em sua lista. O lado oposto recebe as propostas e aceita temporariamente aquela proposta com melhor colocação na lista. Nas rodadas subsequentes, aqueles que vão sendo recusados fazem novas propostas para os próximos de sua lista enquanto o lado oposto pondera as novas propostas com aquela que foi aceita temporariamente na rodada anterior. O jogo termina quando não há novas propostas.

Entretanto, notamos que há uma vantagem clara para o lado que faz as propostas. Se pensarmos no exemplo 2.1.3, vemos que o resultado desse mecanismo será μ_1 caso os homens façam a proposta, gerando o resultado estável ótimo para as mulheres e, analogamente, geramos o resultado μ_4 quanto as mulheres fazem a proposta. Vejamos mais um exemplo para evidenciar esta característica do mecanismo.

Exemplo 2.1.4 – Considere o seguinte jogo em que M=(1,2,3,4), W=(a,b,c,d) e P=((b,d,a,c), (b,c,d,a), (a,c,b,d), (c,b,d,a), (1,3,2,4), (4,1,2,3), (1,2,3,4), (3,1,2,4)). A figura abaixo mostra as interações ocorridas em cada rodada e a alocação estável ótima no final, tanto para os homens quanto para as mulheres. A segunda linha corresponde

Figura 2.1.1 – Resultados estáveis ótimos para cada um dos lados do Exemplo 2.1.4 sob o Mecanismo de Gale e Shapley



Desta forma, vemos que as alocações finais são diferentes, dependendo de qual dos lados fica responsável por fazer a proposta. A escolha de qual lado deve ser favorecido depende de cada cenário.

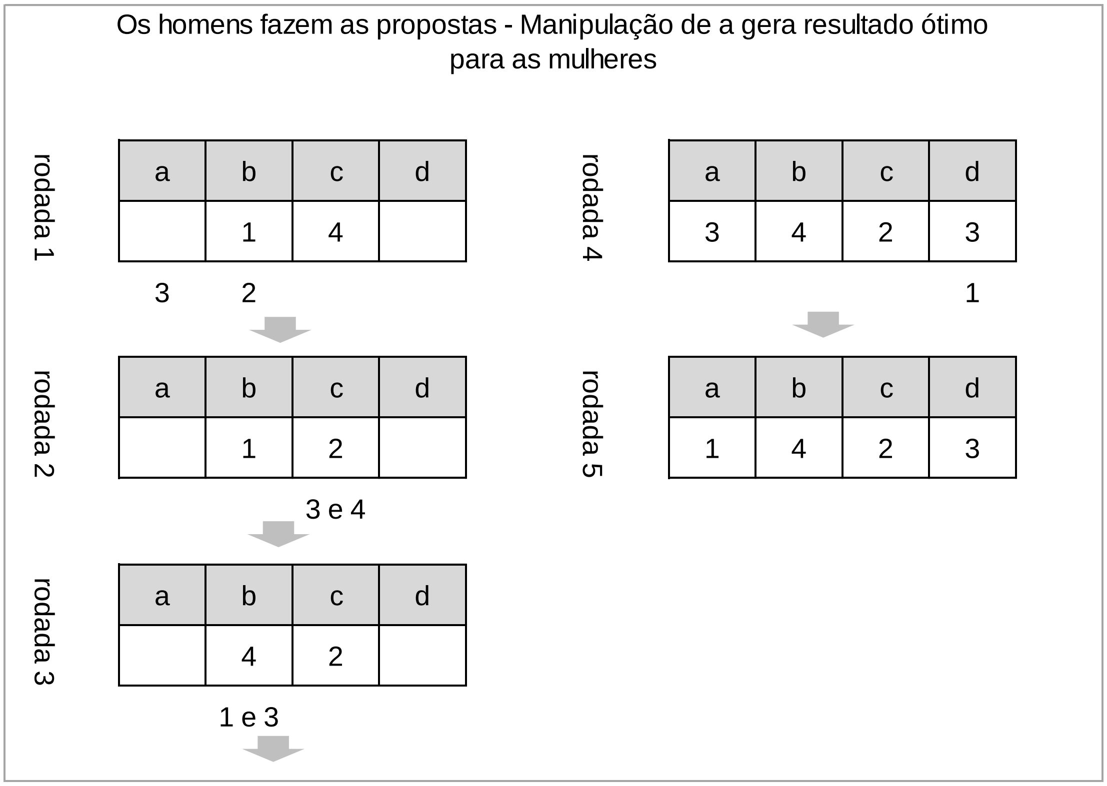
Entretanto, um novo conceito deve ser introduzido para obter uma análise mais completa. Veja a definição abaixo.

Definição 2.1.2- *Strategy-proofness* em mecanismos – Um mecanismo é considerado à prova de estratégia (strategy-proof) se os participantes não possuem incentivos a mentir sobre suas verdadeiras preferências. Equivalentemente, se nenhum participante puder obter um resultado melhor se mentir sob suas verdadeiras preferências.

Na definição acima, “mentir sobre suas verdadeiras preferências” corresponde a não agir diretamente de acordo com as preferências. No caso do algoritmo de Gale e Shapley, por exemplo, em que o lado dos homens faz as propostas, mentir para um homem seria um homem não fazer a proposta a sua mulher preferida na primeira rodada, fazendo a proposta a outra mulher mais abaixo na sua lista de preferências, por exemplo. Ou ainda, no mesmo exemplo, seria uma mulher recusar a melhor proposta recebida em uma rodada mesmo que esta lhe seja aceitável. É importante que um mecanismo não beneficie algum grupo específico de pessoas via esse tipo de manipulação estratégica. Portanto, é fundamental que o mecanismo tente fazer com que os participantes enviem uma lista idêntica à lista de preferência P do jogo $J = (M, W, P)$. Quando um mecanismo não é *strategy-proof*, poderá haver um grupo de indivíduos que se beneficiará em detrimento dos outros. Isto pode acontecer porque determinado grupo é mais inteligente ou conhece melhor as regras do mecanismo.

Segundo Sotomayor (2012), sob qualquer mecanismo em que há mais de um matching estável, pelo menos um agente pode lucrar escondendo suas verdadeiras preferências, assumindo que os outros estão falando a verdade. De fato, no exemplo 2.1.4, se a mulher a enviar a seguinte lista de preferência $P_a = (1,2,4, a, 3)$ no caso em que os homens fazem a proposta, o resultado se desviará para a alocação estável ótima para as mulheres, assim momo mostra a figura abaixo, em que o algoritmo de Gale e Shapley é aplicado usando-se a preferência manipulada da mulher a.

Figura 2.1.2 – Resultado manipulado do Exemplo 2.14 sob Mecanismo de Gale e Shapley



Desta forma, o mecanismo de Gale e Shapley no mercado de casamentos não é à prova de estratégia. Entretanto, a adaptação dele no mercado de escola vai alcançar esta característica. Isto vai acontecer, porque um único resultado estável vai ser gerado, conforme veremos a seguir.

2.2 – O modelo de *school choice* e os três mecanismos

Expandindo o modelo de casamento, temos o *College Admission Game*. A diferença é que um dos lados possui certo número de vagas. Enquanto cada aluno pode ser “casar” com apenas uma universidade, estas podem se “casar” com diversos alunos, respeitando os respectivos números de vagas. O jogo, então, torna-se *J*=(*S,C,P,q*), representando, respectivamente, o grupo de estudantes, o grupo de universidade, as preferências dos agentes e, por fim, o número de vagas (*quotas*) de cada instituição.

Este modelo é bastante adequado para uso nas universidades dos Estados Unidos, onde cada universidade tem liberdade para agir de acordo com suas preferências. Em outros casos, entretanto, estes agentes seguem leis mais rígidas e sua conduta torna o modelo inadequado. Dentre estes, podemos citar as escolas de Ensino Médio americanas e as universidades públicas brasileiras. A pesquisa aplicada neste formato inicia-se com Abdulkadiroğlu e Sönmez (2003).

Neste artigo, as escolas possuem prioridades ao invés de preferências. À primeira vista, as listas são matematicamente idênticas, mas acarretam comportamentos diferentes. Uma escola que possui um vetor de prioridades é considerada um mero bem público que vai ser utilizado pelos alunos e não pode possuir qualquer comportamento estratégico. De fato, o objetivo de uma instituição pública de ensino deve ser servir os alunos ao invés de qualquer outro objetivo. Portanto, não há espaço para manipulação por parte das escolas, nem do ponto de vista de seu objetivo (aplicar as regras de prioridades na seleção), nem do ponto de vista legal, pois se as regras não forem seguidas haverá questionamento judicial sobre o comportamento da escola.

Consequentemente, a propriedade de *strategy-proofness* torna-se mais fácil de ser explorada. Como apenas os alunos podem agir estrategicamente, não é preciso observar o comportamento das escolas. No caso do casamento, era comum obter dois *matchings* estáveis, cada um correspondendo a iniciar-se o mecanismo de Gale e Shapley por um dos lados diferentes, e isto tornava o jogo estratégico. Na escolha escolar, entretanto, isto não deve acontecer, pois todo o foco está nos alunos. Como os alunos fazem as propostas e as instituições são rígidas quanto às suas prioridades, um único matching estável vai ser gerado.

Neste contexto, uma nova propriedade pode ser explorada. É interessante que o mecanismo de alocação de alunos seja o eficiente no sentido de Pareto, pois busca um maior grau de satisfação dos alunos.

Definição 2.2.1- Pareto Eficiência em *school choice* – Um mecanismo é considerado eficiente no sentido de Pareto se não há nenhum par de alunos, designados a escolas diferentes, que mutuamente gostariam de trocar de escola entre si.

Usando a fundamentação teórica de Haeringer e Kljin (2009), temos um jogo com 5 variáveis (*I,S,q,P,f*), sendo: I o grupo de estudantes $I = \{i_1, \dots i_n\}$, S o grupo de escolas S= $\{s_1, \dots s_m\}$, q o vetor de capacidade das escolas $q = \{q_{s_1}, \dots q_{s_m}\}$, P os listas de preferências estritas dos alunos $P = \{P_{i_1}, \dots P_{i_n}\}$ e f as listas de prioridades das escolas $f = \{f_{s_1}, \dots f_{s_m}\}$.

De forma similar ao modelo do casamento, a preferência do estudante i pertence ao conjunto S U i, onde i é quando ele prefere alocar-se consigo mesmo e ficar sem escola ou ir para uma escola particular.

O jogo se resolve através de um mecanismo. É interessante que o mecanismo busque as três propriedades já citadas: estabilidade, *strategy-proofness* e Pareto eficiência. Contamos com três mecanismos abordados na literatura: o mecanismo de Boston (BOS), o mecanismo de baseado em Gale-Shapley, conhecido como *Student-Optimal Stable Mechanism* (SOSM) e o mecanismo dos Ciclos de Trocas Prioritárias (*Top Trading Cycles, TTC*). Em todos os mecanismos, cada aluno i envia uma lista $Q_i \in S \cup \{i\}$ para o órgão regulador, que não é necessariamente igual à lista de preferências.

O mecanismo de Boston, citado pela primeira vez em Alcade (1996), é o mecanismo que tenta dar aos alunos o maior número possível de primeiras opções e é assim chamado por ter sido usado no sistema escolar de Boston por muitos anos e onde foi primeiramente pesquisado.

Considerando a lista Q enviada pelos estudantes, o BOS funciona da seguinte forma, segundo Haeringer e Klijn (2009)[1]:

---

[1] “Step 1. Set q_s^1:=q_s for all $s \in S$. Each student i proposes to the school that is ranked first in Q_i (if there is no such school then i remains unassigned). Each school s assigns up to q_s^1 seats to its proposers one at a time following the priority order f_s. Remaining students are rejected. Let q_s^2 denote the number of available seats at school s. If $q_s^2 = 0$ then school s is removed.

Rodada 1. Seja q_s^1:=q_s para todo $s \epsilon S$. Cada estudante i faz uma proposta para a escola que está na primeira posição em Q_i escola que está na primeira posição em Qi (se o aluno enviar uma lista vazia então ele permanece só). Cada escola s matricula até q_s^1 alunos seguindo sua ordem de prioridades f_s, dentre os alunos que solicitaram matrícula na escola. Os demais alunos são rejeitados. Considere q_s^2 o número de vagas restantes para a escola s. Se $q_s^2 = 0$, então a escola s é removida, pois já completou sua cota.

Rodada $l, l \geq 2$. Cada estudante i rejeitado na rodada $l - 1$ faz uma proposta para a próxima escola em sua lista Q_i (se não há esta escola então ele permanece só). Escolas s matriculam até q_s^l vagas para as novas propostas seguindo sua ordem de prioridades f_s. Os demais alunos são rejeitados. Considere q_s^{l+1} o número de vagas restantes na escola s. Se $q_s^{l+1} = 0$, então a escola s é removida.

O problema deste mecanismo é que há um peso muito grande na sua primeira opção. Se o aluno não consegue esta escola, ele disputa a sua segunda opção com um número provavelmente muito menor de vagas do que disputaria se a enviasse como se fosse sua primeira opção. Ou seja, o mecanismo introduz uma espécie de "maldição do perdedor", no sentido de que, não sendo selecionado em sua primeira escolha, fica cada vez mais difícil ser selecionado nas escolhas seguintes. Isto induz os alunos a agirem de forma estratégica. Segundo um experimento feito por Chen e Sönmez (2006), os alunos se sentem induzidos a enviar listas mais realistas (escolas

---

Step $l, l \geq 2$. Each student i that is rejected in step $l - 1$ proposes to the next school in the ordered list Q_i (if there is no such school then i remains unassigned). School s assigns up to q_s^l seats to its (new) proposers one at a time following the priority order f_s. Remaining students are rejected. Let q_s^{l+1} denote the number of available seats at school s. If $q_s^{l+1} = 0$ then school s is removed."

em que sua aprovação seja mais garantida) ao invés de enviarem suas verdadeiras preferências.

Em suma, o BOS não é *strategy-proof* e não é estável. Entretanto, como apontado por Abdulkadiroğlu e Sönmez (2003), o BOS é Pareto eficiente sob as verdadeiras preferências dos alunos, mas é improvável que não haja mentira, tornando o novo resultado provavelmente ineficiente. O surgimento de novos mecanismos mais eficazes têm tornado o BOS obsoleto.

Neste contexto, citamos o SOSM, baseado no artigo de Gale e Shapley (1962). Segundo Haeringer e Klijn, o SOSM funciona da seguinte forma[2]:

> Rodada 1. Cada estudante i faz uma proposta para a escola que está na primeira posição em Q_i (se o aluno enviar uma lista vazia então ele permanece só). Cada escola s aceita temporariamente até q_s alunos seguindo sua ordem de prioridades f_s. Os demais alunos são rejeitados.
>
> Rodada $l, l \geq 2$. Cada estudante i rejeitado na rodada $l-1$ faz uma proposta para a próxima escola em sua lista Q_i (se não há esta escola então ele permanece só). Cada escola s considera as novas propostas com aqueles alunos temporariamente aceitos e aceita temporariamente até q_s vagas seguindo sua ordem de prioridades f_s. Os demais alunos são rejeitados. O mecanismo termina quando não houver mais propostas.

[2] "Step 1. Each student i proposes to the school that is ranked first in Q_i (if there is no such school then i remains unassigned). Each school s tentatively assigns up to q_s seats to its proposers one at a time following the priority order f_s. Remaining students are rejected.

Step $l, l \geq 2$. Each student i that is rejected in step $l-1$ proposes to the next school in the ordered list Q_i (if there is no such school then i remains unassigned). Each school s considers the new proposers and the students that have a (tentative) seat as s. School s tentatively assigns up to q_s seats to these students one at a time following the priority order f_s. Remaining students are rejected"

Como agora não importa o período em que o aluno faz uma proposta para cada escola, pois a cada rodada o aluno concorre à vaga tanto com os novos envios quanto com os aprovados nas rodadas passadas, não há incentivo a enviar uma lista diferente de suas verdadeiras preferências. Muito pelo contrário, mentir pode até fazer com que o aluno seja alocado em uma escola pior de acordo com suas verdadeiras preferências. Além disto, o mecanismo gera um único resultado estável por definição, evitando o problema citado em Sotomayor (2012), em que dois mecanismos estáveis induzem ao comportamento estratégico.

Provamos por contradição que o SOSM gera um resultado estável. Suponha que o resultado não seja estável. Então necessariamente há pelo menos um estudante i que prefere s à escola em que ele está alocado s' e a escola s possui outro aluno com prioridade menor que i em uma das vagas ou há uma vazia. Se isto é verdadeiro, então o aluno i se candidatou a s' antes de se candidatar a s, contrariando o SOSM, em que os alunos se candidatam na ordem de preferência, tornando-se um absurdo.

Entretanto, o SOSM não garante eficiência no sentido de Pareto. Se um aluno i tem uma prioridade baixa em sua escola preferida s e acaba alocado na escola s' e o aluno i' tem prioridade baixa em sua escola preferida s' e acaba alocado em s, eles gostariam de trocar de lugar entre si, mas o mecanismo não permite. Se fosse permitido, então outro aluno i'' que ficou de fora de uma destas escolas que tenha uma prioridade mediana nelas teria prioridade sobre eles, tornando o mecanismo instável. A instabilidade no *school model* também pode ser chamada de inveja justificada, pois alunos não alocados possuem prioridades superiores a de alunos alocados em determinada escola com *matching* instável.

Surge, então, um *tradeoff* entre estabilidade e eficiência, que será abordado mais tarde. O último mecanismo é o TTC, que busca sempre resultados Pareto eficientes. Ele é baseado em um algoritmo criado por Gale para o mercado de casas, em que cada jogador possuía uma casa e poderia trocar com os demais jogadores caso lhe trouxesse um resultado mais favorável. Este algorítimo foi apresentado pela primeira vez em um artigo de Shapley e Scarf (1974). Segundo Haeringer e Klijn (2009), o TTC segue os seguintes passos[3]:

Rodada 1. Seja q_s^1:=q_s para todo $s \epsilon S$. Cada estudante i aponta para a escola que está na primeira posição em Q_i (se não houver uma escola nesta posição ele aponta para si mesmo, i.e., ele forma um ciclo com ele mesmo e não se matricula em nenhuma escola). Cada escola s aponta para o estudante com maior prioridade em seu f_s. Pelo menos um ciclo será gerado. Se o estudante está dentro de um ciclo, então ele é matriculado na escola para a qual apontou (ou fica só se ele apontou para ele mesmo) e é removido. Se a escola s está no ciclo e $q_s^1 = 1$ então ela é removida. Se a escola s está no ciclo e $q_s^1 > 1$, então a escola não é removida e sua capacidade diminui para q_s^2:=$q_s^1 - 1$.

Rodada $l, l \geq 2$. Cada estudante i rejeitado na rodada $l - 1$ faz uma proposta para a próxima escola em sua lista Q_i que ainda não foi removida em alguma rodada $r, r < l$, ou aponta para si mesmo se não há tal escola. Cada escola s aponta para o estudante com maior prioridade em seu f_s que ainda não foi removido em alguma rodada $r, r < l$. Pelo

[3] "Step 1. Set q_s^1:=q_s for all $s \epsilon S$. Each student i points to the school ranked first in Q_i (if there is no such school then i points to himself, i.e., he forms a self-cycle). Each school s points to the student that has the highest priority in f_s. There is at least one cycle. If a student is in a cycle, he is assigned a seat at the school he points to (or to himself if he is in a self-cycle). Students that are assigned are removed. If a school s is in a cycle and $q_s^1 = 1$, then the school is removed. If a school is in a cycle and $q_s^1 > 1$, the school is not removed and its capacity becomes $q_s^2 := q_s^1 - 1$.

Step $l, l \geq 2$. Each student i that is rejected in step $l - 1$ points to the next school in the ordered list Q_i that has not been removed at some step $, r < l$, or points to himself if there is no such school. Each school s points to the student with the highest priority in f_s among the students that have not been removed at a step $, r < l$. There is at least one cycle. If a student is in a cycle, he is assigned a seat at the school he points to (or to himself if he is in a self-cycle). Students that are assigned are removed. If a school s is in a cycle and $q_s^l = 1$, then the school is removed. If a school is in a cycle and $q_s^l > 1$, the school is not removed and its capacity becomes $q_s^{l+1} := q_s^l - 1$."

menos um ciclo será gerado. Se o estudante está dentro de um ciclo, então ele é matriculado na escola em que ele apontou (ou fica só se ele apontou para ele mesmo) e é removido. Se a escola s está no ciclo e $q_s^l = 1$ então ela é removida. Se a escola s está no ciclo e $q_s^l > 1$, então a escola não é removida e sua capacidade diminui para q_s^{l+1}:=$q_s^l - 1$. O algoritmo termina quando todos os estudantes ou todas as escolas foram removidos.

O mecanismo funciona como se cada escola desse uma vaga para seus primeiros colocados e depois eles trocam entre si, como se fossem as casas de Gale, então o resultado é Pareto Eficiente. Como o aluno está sempre tentado sua melhor opção possível a cada rodada, o mecanismo também é a prova de estratégia. Não há vantagem em enviar uma lista $Q \neq P$.

Entretanto, o mecanismo não garante um *matching* estável. Isto acontece porque o aluno pode ter uma prioridade baixa em uma escola e prioridade alta em outra e, trocando com os outros participantes, conseguir uma vaga na escola de prioridade baixa, deixando de fora algum aluno com prioridade maior que ele.

Evidenciamos mais uma vez o tradeoff entre estabilidade e eficiência. Mas então qual destes é mais importante? Esta resposta depende do cenário em que o mecanismo foi criado. Pensando no caso das universidades brasileiras, em que os capítulos seguintes vão trabalhar, parece mais importante alcançar estabilidade. Isto porque em um *matching* instável há inveja justificada, e como as universidades são públicas e devem seguir regras mais rígidas na admissão dos alunos, aqueles estudantes que não foram aceitos em determinada universidade poderiam processar o governo se houver um aluno admitido nesta escola com uma nota menor. A ineficiência em um *matching*, por outro lado, quer dizer que o bem-estar geral não é tão grande como poderia ser. De fato, pode-se argumentar que é mais interessante ao governo uma alocação justa do que uma alocação com maior utilidade, pois a desutilidade gerada por um processo judicial é maior do que os ganhos de utilidade de uma situação eficiente.

Exemplo 2.2.1- Suponha um mercado (I,S,q,P,f) de alunos e universidades com as seguintes características:

$$I = (1,2,3,4,5,6)$$
$$S = (a, b, c)$$
$$q = (2,2,2)$$
$$P = \big((a, b, c), (b, c, a), (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (c, b, a)\big)$$
$$f = \big((6,5,4,3,2,1), (1,2,3,4,5,6), (4,5,1,2,6,3)\big)$$

A resolução deste mercado sob os três mecanismos podem ser vistas nas figuras abaixo:

Figura 2.2.1 – Resolução do exemplo pelo o BOS

rodada 1

a	b	c
4	2	6
3	5	

1

rodada 2

a	b	c
4	2	6
3	5	

1

rodada 3

a	b	c
4	2	6
3	5	1

Sob o BOS o aluno 1 poderia ter se saído melhor se tivesse enviado uma lista diferente de suas verdadeiras preferências. Se ele tivesse enviado a lista $Q_1 = (b, a, c)$, então ele seria alocado na escola b, que para ele é uma escola melhor do que a escola c em que ele é alocado. Consequentemente, o aluno c possui inveja justificada de 2 e de 5, pois 1 preferiria ter uma vaga em b do que em c e está em uma posição superior na lista de prioridades da escola b, tornando o *matching* instável.

Apesar do *matching* ser eficiente no sentido de Pareto, tal situação seria improvável de acontecer na vida real. Como o BOS incentiva os estudantes a jogarem estrategicamente, é improvável que todos os alunos hajam honestamente, única situação em que o BOS garante a Pareto eficiência.

A figura abaixo já nos mostra um cenário bem diferente:

Figura 2.2.2 – Resolução do exemplo pelo SOSM

rodada 1

a	b	c
4	2	6
3	5	

1

rodada 2

a	b	c
4	1	6
3	2	

5

rodada 3

a	b	c
5	1	6
4	2	

3

rodada 4

a	b	c
5	1	6
4	2	

3

rodada 5

a	b	c
5	1	6
4	2	3

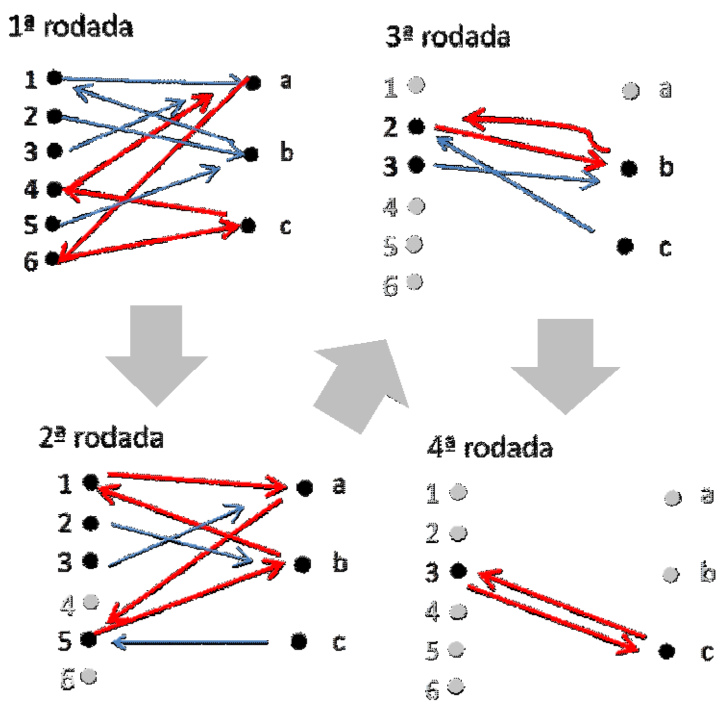
Neste caso, não há incentivo a mentir. Supondo que todos os estudantes agem de forma racional, o resultado acima é o único resultado gerado pelo mecanismo e é estável.

Entretanto, os alunos 1 e 5 estariam mais felizes se trocassem de vagas entre si, mostrando que o resultado não é Pareto eficiente. Porém, se esta troca fosse permitida pelo mecanismo, a estabilidade se perderia.

Por fim, o TTC é representado a seguir, com os ciclos prioritários de cada rodada em vermelho. Como todas as trocas já foram feitas, o mecanismo é Pareto eficiente.

Entretanto, o aluno 3 possui uma inveja justificada do aluno 1, tornando o mecanismo instável, como vemos na figura a seguir.

Figura 2.2.3 – Resolução do exemplo pelo TTC



a	b	c
4	5	6
1	2	3

3 Extensões ao modelo básico

O modelo de *school choice* parece bastante razoável para a aplicação na sociedade. Entretanto, algumas mudanças ainda podem ser feitas no intuito de moldá-lo de forma que possa ser aplicável no cenário brasileiro. É preciso englobar tanto as políticas sociais do governo brasileiro como a forma pelo qual os alunos brasileiros enviam suas propostas para o mecanismo de seleção.

Como forma de ação afirmativa para reverter as desigualdades de oportunidade associadas à origem ética, presentes na História brasileira, as universidades públicas no Brasil reservam parte de suas vagas aos afro-descendentes. Embora muito contestada, a reserva de vagas para estudantes negros no Brasil foi considerada constitucional pelo Superior Tribunal Federal em 2012 e, logo, não é objetivo deste trabalho questionar a existência das cotas no país. O modelo *school-choice* será então remodelado na subseção a seguir de modo a incluir esta política afirmativa do governo.

Na subseção seguinte, será discutida a forma de envio da lista por parte dos estudantes. No modelo original, os estudantes enviam uma lista para o órgão centralizador cujo tamanho é igual ao número *m* de escolas participantes (o vetor S do modelo). Isto significaria dizer que cada aluno participante do Sisu em 2013 envaria uma lista com as 54 instituições participantes, em ordem de preferência. Trata-se de uma hipótese heroica que pode dificultar a coleta de dados, mas que garante a eficácia do mecanismo.

3.1 Cotas raciais

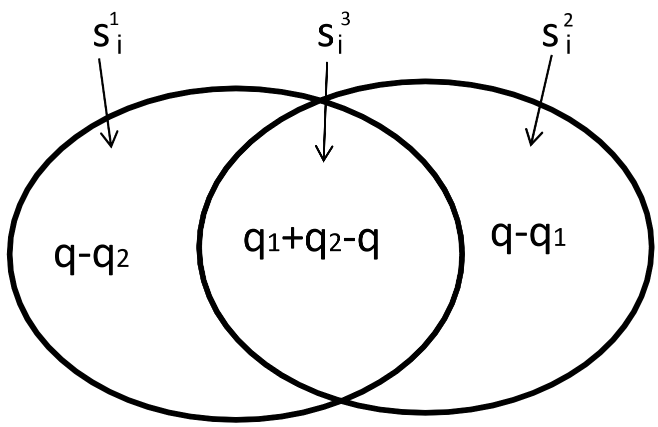
Segundo Abdulkadiroğlu e Sönmez (2003), tanto o *Student Optimal Stable Mechanism* quanto o mecanismo *Top Trading Cycles* podem ser facilmente modificados para acomodar esta nova regra imposta. Focaremos apenas no SOSM, pois, conforme discutido no capítulo anterior sobre o *tradeoff* existente entre estabilidade e eficiência, consideramos estabilidade como um fator mais importante para o mercado brasileiro.

De forma geral, cada escola possui q vagas no total, q_1 vagas acessíveis aos alunos do tipo 1 e q_2 vagas acessíveis aos alunos do tipo 2, de modo que $q \geq q_1$,$q \geq q_2$ e $q_1 + q_2 \geq q$. Desta forma:

- $q - q_2$ vagas são reservadas exclusivamente para alunos do tipo 1
- $q - q_1$ vagas são reservadas exclusivamente para alunos do tipo 2
- $q_1 + q_2 - q$ são vagas que podem ser preenchidas por qualquer tipo de aluno

O mecanismo vai funcionar como se cada escola s_i fosse subdividida em 3 escolas menores s_i^1,s_i^2,s_i^3. A figura abaixo ilustra esta divisão:

Figura 3.1.1 – Divisão da escola s_i em 3 escolas menores



A lista de prioridades de s_i^3 é a única que permanece igual às prioridades da escola s_i. A lista de prioridades da escola s_i^1, aquela exclusiva para alunos de tipo 1, é obtida com a lista de prioridades de s_i retirando-se os alunos de tipo 2, que passam a ser inaceitáveis nessa escola. De forma análoga, a lista de preferência de s_i^2 é obtida com a lista de prioridades de s_i da qual são removidos os alunos do tipo 1, que se tornam inaceitáveis.

As listas de preferências dos alunos também devem ser adaptadas, seguindo as seguintes regras:

- Para cada escola s, s^3 é preferível à s^1 e s^2. A ordem entre s^1 e s^2 é irrelevante, pois um aluno sempre vai ser aceitável em uma e inaceitável na outra.[4] Desta forma, o mecanismo vai funcionar seguindo uma ordem pré-estabelecida, os alunos vão sempre tentar uma vaga em s^3 antes de tentarem as vagas de cotas.
- Para cada par de escolas s_1 e s_2, se s_1 é preferível à s_2, então cada s_1^1,s_1^2,s_1^3 é preferível a cada s_2^1,s_2^2,s_2^3

O exemplo abaixo ilustra melhor estas peculiaridades:

Exemplo 3.1.1 – Suponha que um grupo de alunos $I = \{1,2,3, \dots ,10\}$ queiram ser alocados na escola s, que possui $q = 6$ vagas e a seguinte lista de prioridades $f_s = \{1,2,3, \dots ,10\}$. Suponha que os alunos ímpares são alunos do tipo 1, alunos pares são alunos do tipo 2 e $q_1 = 5$ e $q_2 = 2$. Desta forma, temos que:

- $q - q_2 = 4$ vagas são reservadas exclusivamente para alunos do tipo 1
- $q - q_1 = 1$ vagas são reservadas exclusivamente para alunos do tipo 2
- $q_1 + q_2 - q = 1$ são vagas que podem ser preenchidas por qualquer tipo de aluno

É evidente que se não houvesse cotas raciais, os alunos de 1 a 6 seriam aqueles que conseguiriam as vagas na escola s, representando então $\mu = \{1,2,3,4,5,6\}$ o *matching* estável do problema. Contudo, dividindo a escola em 3 outras menores, o *matching* gerado pelo SOSM seria:

- Rodada 1. Todos os alunos tentariam entrar em s^3 e somente o aluno 1 seria aceito

[4] Este é um contraponto com Abdulkadiroğlu e Sönmez (2003). No artigo, a ordem de preferência é $s^1 > s^2 > s^3$, mas não condiz muito com a realidade brasileira. Os alunos que concorrem a uma vaga em uma instituição brasileira concorre primeiro à uma vaga geral e só depois, em caso de falha, irá concorrer às vagas especiais, se preencher todos os pré-requisitos.

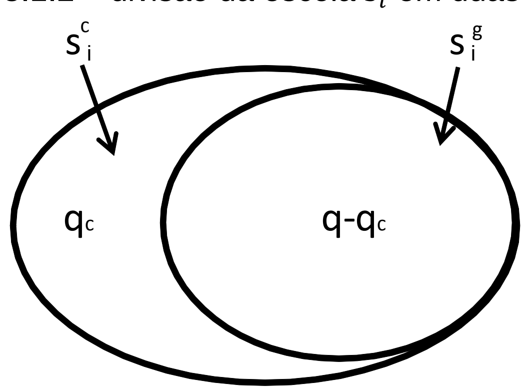
- Rodada 2. Os alunos ímpares restantes tentariam entrar na escola s^1 e todos seriam aceitos. O aluno 2 ocuparia a vaga restante exclusiva para alunos do tipo 2

O *matching* gerado seria $\mu' = \{1,2,3,5,7,9\}$. O resultado é instável sob a lista de prioridade da escola s, f_s, pois os alunos 4 e 6 possuem inveja justificada dos alunos 7 e 9. Porém, o mecanismo é calculado na forma de três escolas com listas de prioridades distintas, f_{s^1}, f_{s^2}, f_{s^3}, e o resultado é estável sob essa ótica.

Se entendermos as prioridades da escola s como sendo o ranking de alunos segundo uma prova realizada pela escola e esta prova como um indicativo do nível intelectual de cada aluno, então μ' representa um cenário pior para a escola, pois o nível intelectual em μ seria maior. Contudo, a existência de uma política afirmativa deste tipo sugere a existência de um ganho social gerado por este favorecimento de uma classe social ou racial menos favorecida. Conforme dito anteriormente, não é objetivo deste trabalho mensurar se o ganho social gerado é maior ou menor do que a potencial perda de nível intelectual gerado com a implementação desta política, portanto seguiremos uma posição neutra quanto a este assunto.

Restringindo um pouco mais o modelo, podemos torná-lo mais próximo do mercado brasileiro. No país, há um número de vagas reservado aos afrodescendentes e o restante pode ser preenchido por qualquer tipo de pessoa. Não há, consequentemente, um número de vagas reservado aos não negros. Desta forma, o modelo pode ser apresentado como:

Figura 3.1.2 – divisão da escola s_i em duas escolas menores



A escola se divide em apenas duas, uma escola de cotas (s^c) e uma escola geral (s^g). A escola de cotas possui q_c vagas enquanto a escola geral possui $q - q_c$ vagas. As propriedades do modelo continuam as mesmas do caso geral de 3 escolas, a diferença é que o número de vagas destinado aos alunos do tipo 2 é igual a zero.

3.2 Forma de envio

No modelo de *school choice*, cada aluno i envia, conforme mencionado no capítulo anterior, uma lista Q_i para o órgão regulador. O *Student Optimal Stable Mechanism*, por sua vez, vai tentar alocá-lo em uma escola seguindo a ordem na lista enviada. O resultado final é estável, mas tudo está baseado em uma hipótese inicial de que a lista enviada é igual à lista de preferência estrita de cada aluno, ou seja, de que Q_i=P_i. O que acontece quando esta hipótese é relaxada?

Em diversas situações reais de *school choice,* os alunos só podem enviar uma lista com um número limitado de escolas. Com base em dados de Haeringer e Kljin (2009), o distrito de Nova Iorque possui cerca de 500 escolas. Seria extremamente improdutivo se cada um dos 90.000 alunos enviasse uma lista com 500 escolas. De fato, os alunos são permitidos a enviar no máximo 12 escolas nesta lista. Veremos então como o SOSM se comportará quando imposta esta nova restrição.

No jogo, os alunos agora submetem uma lista de até k escolas, sendo k o número máximo de escolas enviadas *(quota) e* $1 \leq k \leq m.$ Veja no exemplo abaixo o funcionamento do mecanismo sob esta nova restrição.

Exemplo 3.2.1 - Suponha um mercado (I,S,q,P,f) de alunos e universidades com as seguintes características:

$$I = (1,2,3,4)$$

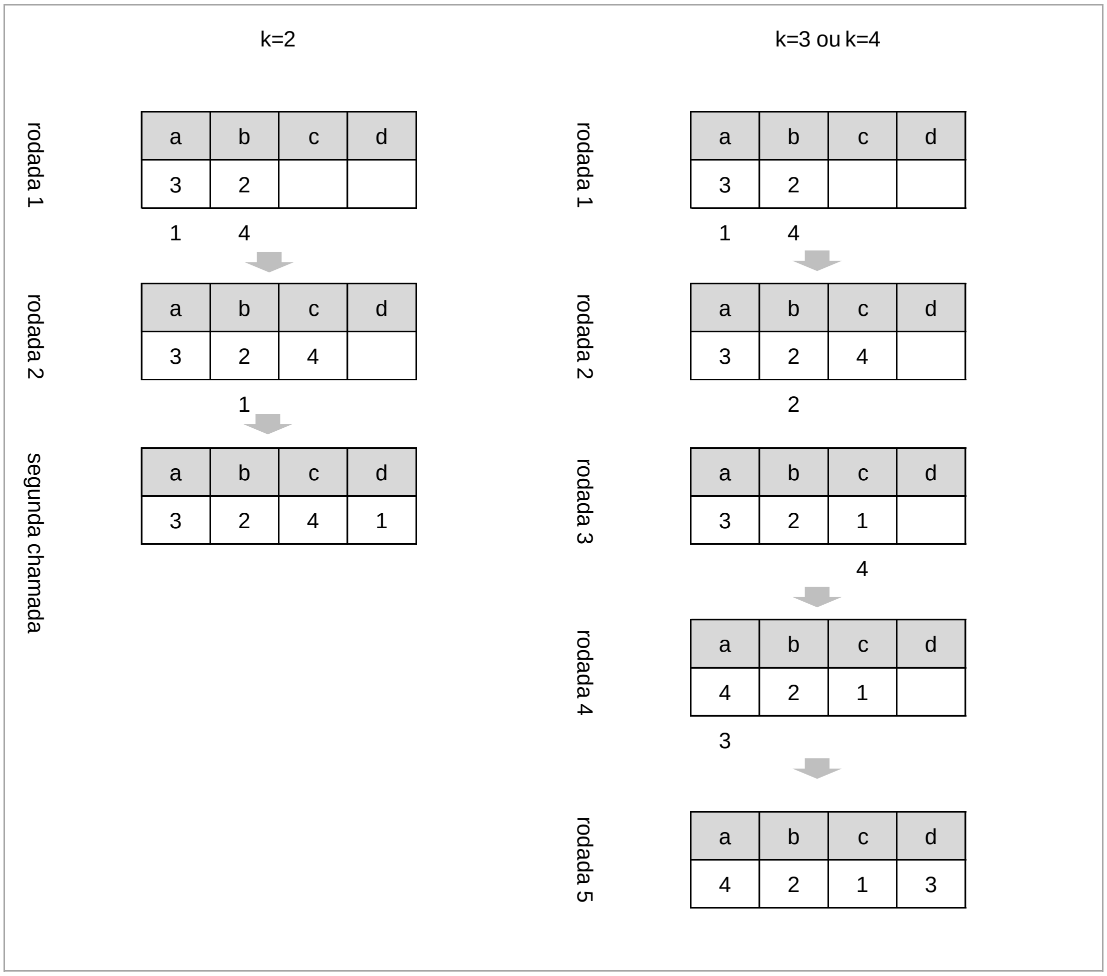
$$S = (a,b,c,d)$$

$$q = (1,1,1,1)$$

$$P = \big((a,b,c,d),(b,a,c,d),(a,d,c,b),(b,c,a,d)\big)$$

$$f = \big((4,3,2,1), (2,1,3,4), (1,2,3,4), (3,2,4,1)\big)$$

A figura abaixo representa o funcionamento do SOSM sob $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$, supondo que os alunos estão enviando suas verdadeiras preferências:



Quando $k = 2$, o jogo termina na segunda rodada, pois o aluno 1 já esgotou suas duas tentativas e ficou sem nenhuma vaga. Eventualmente, uma segunda chamada iria ser feita e o aluno 1 terminaria alocado na escola d. O resultado final é instável, pois o aluno 1 possui inveja justificada do aluno 4. Entretanto, o resultado poderia ter sido diferente se o jogador 1 tivesse jogado estrategicamente. Se o jogador 1 tivesse notado anteriormente que a escola b seria inviável, e enviasse no lugar uma opção mais realista, uma *safe choice*, como a escola c, o resultado teria sido melhor sob as verdadeiras preferências (pois a escola c é preferível à escola d para o aluno 1)

Note que o resultado é o mesmo se $k = 3$ ou $k = 4$. Isto varia com cada situação, mas é importante saber que o *matching* estável pode ser, em alguns casos, alcançado mesmo com restrições. Quanto mais próximo k for de m, mais próximo estaremos do equilíbrio.

Nas palavras de Haringer e Kljin (2009), “restringir as escolhas dos estudantes é uma política muito custosa. Ela de fato os força a serem estratégicos, o que pode ir contra os interesses do designer de mecanismo”. Como discutido anteriormente, a propriedade de *strategy-proof* é bastante importante para o bom funcionamento do mecanismo e perdê-la não é muito interessante. Ao mesmo tempo, também pode ser custoso permitir o envio de uma lista com m opções, como os 90.000 alunos enviando listas de 500 escolas em Nova Iorque. É pouco provável que haja uma mudança no resultado entre $k = 400$ e $k = 410$.

Calsamiglia et al (2010) fizeram um estudo experimental sobre esta restrição no modelo de *school choice*. No experimento, 36 estudantes buscam as 36 vagas distribuídas em 7 escolas. Duas delas possuem apenas 3 vagas, enquanto o restante possuem 6 vagas cada. Isto ocorre para simular os efeitos de escolas mais concorridas do que outras.

Ainda, todos os alunos recebem uma *safe choice*, uma escola em que eles sabem que garantem um lugar nesta escola se assim preferirem. Desta forma, cada escola é a *safe choice* de um número de alunos igual à sua capacidade. Do ponto de vista teórico, a ocorrência desta informação extra dada aos alunos não deveria influenciar a decisão dos alunos no mecanismo SOSM, mas pode influenciar quando há a restrição ao número de envio, visto que o mecanismo torna-se estratégico.

No restante do experimento, cada participante recebe uma lista de preferência (randômica ou desenhada pelos examinadores) e envia uma lista para o examinador. O mecanismo então é colocado em prática e o resultado gera um ganho monetário para os participantes, que é tanto maior quanto melhor for sua posição final na sua respectiva lista de preferência.

Os resultados obtidos são bastante interessantes. Nota-se uma queda 38,8% no número de alunos que enviam as verdadeiras preferências no SOSM (de 56,9% para 18,1%) quando há a imposição de uma restrição ao número de escolas na lista enviada.

Duas explicações podem ser dadas para este fenômeno, introduzidas por Chen e Sönmez (2006): o *SSB – Small School Bias* (Viés da escola pequena) e o *DSB – District School Bias* (Viés da escola do distrito). O SSB consiste em diminuir a posição na lista daquelas escolas mais concorridas ou que possuem menos vagas. O DSB, por sua vez, consiste em elevar a posição da escola do distrito na decisão do aluno. O termo escola do distrito refere-se à *safe choice* do aluno, pois muitas vezes é usado o fator localização na determinação das *safes choices*. Logo, o aluno terá vantagem se aplicar para a vaga de uma escola situada no distrito em que vive.

Em um cenário restrito, é comum ocorrer a seguinte situação: o aluno tem um número restrito de escolas na sua lista e, portanto, descarta as melhores escolas para não “queimar” suas chances em escolas em que teria pouca probabilidade de passar. Isso é o que o SSB quer mostrar e isso pode influenciar na estabilidade do resultado gerado. Eventualmente, algum aluno que joga como na estratégia acima poderia ter sido aprovado em uma das escolas que ele deixou de enviar, causando inveja justificada. Entretanto, apesar da inveja justificada ser uma medida de instabilidade, este caso não levaria a um processo judicial, como no mecanismo TTC, pois o aluno simplesmente não enviou aquela opção.

Concomitantemente, há um risco muito grande no modelo restrito: o de ficar sem escola. Voltando no experimento, é melhor para os participantes receberem qualquer remuneração do que remuneração nenhuma. Logo, ainda que a *safe choice* do participante seja a última em sua lista de preferência, é uma boa estratégia incluí-la dentro da lista, o que induz o DSB. Contudo, a força deste viés pode ser um pouco reduzida no mundo real de escolha de universidades, pois, em determinadas ocasiões, pode ser mais vantajoso entrar direto no mercado de trabalho do que ingressar em uma universidade de baixa qualidade. Portanto, nosso sentimento é que é plausível que o DSB ocorra de fato, mas talvez em uma escala menor do que o previsto pelo experimento.

Vejamos as conclusões sobre a estabilidade. O melhor meio de medir a estabilidade é por meio de casos de inveja justificada. Como visto no capitulo anterior, o mecanismo é estável quando não há inveja justificada, ou seja, não há um caso em que um aluno que gostaria de estudar em determinada escola não está alocado e possui uma prioridade superior à de algum aluno matriculado. Na média, cada experimento conta com um número de 7,8 casos de inveja justificada no modelo irrestrito e 9,6 casos no modelo restrito, mostrando maior instabilidade no modelo restrito.

No entanto, é importante explicar melhor estes números, afinal, o SOSM é um mecanismo estável e não deveria gerar instabilidade no modelo irrestrito. Isto ocorre porque se trata de um experimento com pessoas reais, que nem sempre agem de maneira racional, principalmente em um cenário laboratorial. De fato, apesar de entenderem que o mecanismo é estável, alguns participantes podem ter o estímulo psicológico a incluir na sua lista declarada de preferências sua *safe choice* numa posição acima da verdadeira, de forma a sentir-se mais seguro. Com isso, é esperado que resultados experimentais não se igualem aos resultados teóricos.

4 O caso brasileiro

Em 2010, o governo brasileiro criou o Sistema de seleção unificada, conhecido como Sisu. Este é uma plataforma online que possui o objetivo de selecionar alunos para as universidades públicas do país. O presente capítulo busca fazer uma análise histórica das formas de seleção de alunos em universidades públicas brasileiras com base na teoria de two-sided matching.

A ferramenta usada na comparação entre as diversas metodologias utilizadas ao longo dos anos são os problemas propostos por Roth (2008). Segundo ele, mercados de dois lados precisam buscar três características importantes que serão usadas como diretrizes na nossa análise:

1. Abrangência (*thickness)*
2. Superar a congestão (*overcome the congestion)*
3. Simplicidade e segurança (simple and safe)

Em primeiro lugar, o mecanismo só vai ser eficaz se uma quantidade razoável do mercado participar, ou seja, ter abrangência. Se, por exemplo, poucos investidores brasileiros comprassem ações na Bovespa, as empresas não iriam querer abrir o capital e, consequentemente, os investidores iriam buscar investimentos alternativos. Também é importante ter abrangência no mercado de alunos e universidades. Se há um sistema centralizador das inscrições dos alunos, queremos que tanto os alunos quanto as universidades participem. Caso contrário, os agentes vão querer operar por fora.

Superado o problema da abrangência, surge o problema da congestão. Pelo fato de muitos agentes estarem usando o mecanismo de matching, o fluxo de transações pode ser grande o suficiente para que não seja possível realizar tantas transações. Isso pode se dar como uma restrição em servidores digitais, em que o montante de informação enviada é tão grande que o sistema cai ou nem todas as informações são processadas.

Por último, queremos que o sistema seja fácil e seguro de operar, de forma que impeça os participantes de operarem por fora do sistema ou de engajarem em comportamento estratégico que reduz o bem-estar geral. Voltando no caso da Bolsa de Valores, se o sistema fosse muito complicado ou inseguro de operar, teríamos um alto número de negócios feitos por fora do sistema, em que o investidor e a empresa negociam diretamente. Também podemos citar alguns experimentos, como em Calsamiglia *et al* (2010): vemos que dois dos mecanismos propostos são à prova de estratégia e que, portanto, não há ganho para os agentes em mentir sobre suas verdadeiras preferências. Entretanto, vemos que nem todos os agentes participam da forma esperada e acabam reduzindo o bem-estar geral, provavelmente porque o sistema, ao parecer complicado para estes participantes, pode fazer co eles não entendam que estariam melhor agindo de forma autêntica e não estratégica.

Na próxima seção, teremos uma descrição histórica sobre a seleção de alunos no Brasil e depois uma seção sobre o novo sistema, ambos usando as características acima como balizadores da análise. Depois, compararemos com o mecanismo ideal que deveria ser usado e tecemos algumas conclusões.

4.1 Seleção até 2009

Durante muitos anos, a seleção de alunos nas universidades públicas foi feita de forma descentralizada. Cada universidade aplicava sua própria prova (vestibular), segundo suas próprias regras e conteúdo. Esta liberdade permitia às universidades definirem o padrão de aluno desejado por cada uma, mas havia diversos problemas.

Nem todas as universidades conseguiam obter o padrão desejado, pois havia um problema de falta de abrangência. Como os locais de provas eram limitados, muitas vezes apenas nas cidades próximas às respectivas universidades, muitos alunos não tinham acesso a esses locais. Os alunos, por sua vez, tinham que escolher estrategicamente os vestibulares que iriam participar, considerando datas, conteúdos abordados em cada prova, tempo de estudo e restrição orçamentária (pois havia taxa de inscrição e custo de transporte). Os dois lados saiam insatisfeitos, pois muitos alunos não podiam fazer o vestibular de todas as suas universidadess preferida e, como alguns destes alunos iriam ter uma nota superior à nota de alguns dos aprovados em cada universidade, as mesmas iriam preferir ter admitido estes alunos ao invés de alguns dos que foram aprovados.

Como um problema de congestão, podemos citar as datas das provas. Como há um grande número de universidades públicas no Brasil e os vestibulares devem ser feitos no começo ou no meio do ano, antes dos respectivos períodos letivos, era inevitável que vestibulares de universidades diferentes fossem marcados nos mesmos dias. Isto prejudicava os alunos, que tinham que deixar de participar em algumas instituições porque as datas das provas coincidiriam com uma opção mais preferida ou menos custosa.

Ainda havia um grave problema, abordado em Haeringer e Kljin (2009), que é muito verídico no caso brasileiro e que pode ser classificado como problema na segurança dos agentes. Em muitos vestibulares, os alunos eram obrigados a optar apenas por uma opção de curso ou, em outras poucas universidades, algumas poucas opções de curso. Esta restrição, segundo os autores, incentivam os estudantes a tomarem decisões estratégicas, o que resulta em bem estar final menor segundo as verdadeiras preferências dos agentes, conforme foi discutido no capítulo anterior.

Em 2009, o governo criou o novo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A nova versão, mais completa que as edições anteriores, surgiu como um meio de substituir o vestibular. Cada universidade, porém, tinha a liberdade de adotar o novo ENEM como parte integral ou parcial do seu processo de seleção. Porém, os problemas sugeridos acima não conseguiram ser resolvidos. Poucas universidades adotaram o ENEM em seus processos seletivos e, destas, a maior parte utilizou o ENEM apenas de forma parcial, ainda exigindo a ocorrência de um vestibular.

4.2 A partir de 2010

Neste ano, o governo criou o Sistema de Seleção Unificada, uma plataforma online que utiliza a nota do novo ENEM para alocar estudantes nas universidades públicas. Por causa da pouca adesão ao ENEM, a utilização do sistema foi pequena, mas têm ganhado força nos últimos anos.

O Sisu funciona da seguinte forma: os alunos se cadastram na plataforma, vinculam seu cadastro com a nota do ENEM obtida em sua última realização e definem duas opções de curso em duas universidades diferentes, em ordem de preferência. O sistema, por sua vez, gera um ranking diário com a posição de todos os alunos em cada curso e as respectivas notas de corte. Aqueles alunos que ficaram abaixo da nota de corte, podem refazer a seleção e optar por outras duas opções de curso. O ranking é atualizado todos os dias e as notas de cortem podem variar a cada dia. Um aluno pode estar acima de corte em um dia, e no seguinte o mesmo está abaixo. Todo este processo ocorre dentro de um intervalo de cinco dias.

Ao final do período de tempo, aqueles alunos acima da nota de corte são definitivamente aceitos na universidade e devem se preparar para o processo de matrícula, que é definido por cada universidade. Após o processo de matrículas, os alunos que perderam esta inscrição ou não atenderam os pré-requisitos do processo de matrícula de cada universidade perdem as vagas e o Sisu reabre com a segunda chamada. Nesta etapa, alunos que não foram aceitos na primeira chamada podem tentar mais uma vez e alunos que foram selecionados para a segunda opção também entram na lista de espera da sua primeira opção.

Cada universidade pode adotar um peso diferente em cada matéria da prova para cada curso e turno disponível. Por exemplo, o departamento de Economia da UnB pode adotar um peso 2 para matemática e um peso 1 para as demais matrizes do ENEM, enquanto o departamento de Letras da UnB pode adotar um peso 2 para Linguagens e peso 1 para as demais.

Conforme determinado pelas Constituição Federal, o Sisu também comporta a utilização das políticas de cotas sociais. O sistema permite duas modalidades de cotas raciais: a concessão de um bônus para os alunos cadastrados à nota obtida pelo ENEM ou reserva de vagas.

Podemos notar que o Sisu é um mecanismo muito mais abrangente do que os vestibulares descentralizados do passado. Porém, novos problemas surgiram, merecendo uma análise mais detalhada. Como um grande numero de universidades federais já adotam o Sisu como mecanismo de ingressão, 105 segundo o site Brasil

Escola, o Sisu já alcançou uma boa abrangência, mas ainda apresenta problemas de congestão e certa insegurança.

Os alunos devem acessar frequentemente o portal durante o período de inscrições para verificar se o reenvio é necessário, pois os rankings são atualizados diariamente. Porém, como o último dia é decisivo e há um ambiente de muita incerteza, o sistema gera um incentivo muito forte para acessá-lo no último dia de seleção para fazer a última tentativa. Esta congestão do último dia pode levar a sobrecarga dos servidores e fazer com que algumas inscrições não sejam realizadas.

A restrição no envio dos alunos também causa certos problemas, conforme discutido no capítulo anterior. A restrição quanto ao número de apenas duas instituições induz os alunos a adotarem um comportamento estratégico, omitindo suas verdadeiras preferências. Assim sendo, se na lista de preferência de um determinado aluno, sua *safe choice* está entre as suas primeiras opções, então o efeito da restrição não será muito grande. Porém, se isto não acontece, os alunos, de acordo com sua aversão ao risco, tendem a supervalorizar sua *safe choice* na lista de submetida. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.2.1 – Considere um aluno com a seguinte lista de preferência de universidades: (A, B, C, D, E, F) no modelo Sisu e que F seja uma universidade com um histórico de notas de corte baixas. No primeiro dia não há nenhum parâmetro que o induza jogar estrategicamente e, portanto, envia a opção (A,B). Suponha que até o quarto dia o aluno tenha sido aceito numa dessas opções. Suponha ainda que no quinto e último dia, no entanto, ele percebe que ficou de fora de ambas as universidades A e B. Então, é improvável que o aluno envie (C,D), as próxima opções em sua lista de preferência. Ao invés disto, é mais provável quem o aluno inclua F na hora de enviar, por conta da aversão ao risco de ficar sem vaga.

5 Comparação entre o SOSM e o SISU

No capítulo anterior, vimos a fundo o funcionamento do método de seleção brasileiro e discutimos as particularidades do SISU e os incentivos que ele pode causar. Entretanto, é importante tirar algumas evidências empíricas e faremos isto em uma simulação. Os dois mecanismos estão programados em Excel, e um exemplo dele está disponibilizado no apêndice.

Todo o código é trabalhado na forma matricial e o que ele faz é pegar a matriz de preferência dos alunos, a matriz de prioridade das escolas e o vetor de vagas e aplicar o *deferred acceptance algorithm*, gerando como resultado a alocação final de cada escola em forma matricial.

A programação do SOSM é feita numa planilha que gera diversos rounds, até o ponto em que não há mais novas propostas e o mecanismo para. O SISU segue na mesma formatação. Só que ele funciona como se fosse um SOSM restrito aplicado cinco vezes, uma para cada dia de funcionamento, por isso uma planilha para cada dia de SISU. Como no SISU só pode enviar duas opções por dia, a matriz de preferência precisa reduzida de $n * m$ (alunos x escolas) para $n * 2$. Ao mesmo tempo, como em cada dia de funcionamento as duas opções enviadas podem ser diferentes daquelas enviadas no dia anterior, a matriz de preferência restrita dos alunos sofre alterações para cada dia.

Logo, o SISU deve funcionar da seguinte forma. No primeiro dia, não há informações suficientes e cada aluno envia as duas escolas preferidas. O código, então, funciona como no SOSM restrito, pois cada aluno enviou apenas duas opções e o resultado é uma matriz em que alguns alunos conseguiram vagas e outros ficaram de fora.

A partir do segundo dia, o cenário muda e faremos uma hipótese simplificadora a respeito do comportamento do agente. Assumiremos que todos os alunos possuam certa aversão ao risco e por isso ele sempre enviará sua *safe choice* como segunda opção no envio, ou seja, a segunda inscrição sempre será naquela escola em que o aluno possua a nota mais alta nela. Quanto a primeira opção, três cenários podem acontecer: se ele conseguiu vaga em sua primeira opção, ele simplesmente a reenvia para o mecanismo; se ele conseguiu vaga em sua segunda opção, ele a torna primeira opção; e por último, se ele não conseguiu vaga em nenhuma de suas duas opções, ele vai enviar a melhor opção possível segundo sua lista de preferência (por possível, entende-se que ele envia aquela que ele tem certeza que conseguiria vaga no dia anterior). Este comportamento se perdura até o último dia, quando o resultado gerado realmente será definitivo. Desta forma, cada dia do SISU apresenta uma matriz de preferência reduzida diferente, com informações tiradas diretamente da matriz de preferência original.

O código tenta captar uma característica bem forte no SISU, a consulta das notas de corte. Em qualquer dia diferente do primeiro, os alunos podem acessar o site a ver a nota do último colocado classificado de cada curso no dia anterior. Se um aluno, por exemplo, não conseguiu vaga em opções do primeiro dia, ele pesquisará outras alternativas, que não seriam necessariamente a terceira e a quarta escolas mais preferidas. Se a nota de corte da terceira escola no primeiro dia for superior à nota do aluno, não tem porque ele gastar uma de suas tentativas nesta escola, pois as notas de corte só tendem a aumentar de um dia para o outro.

A simulação se dá com 100 alunos e 10 escolas com 5 vagas cada. Foram feitas 5 simulações para obter resultados mais consistentes. É importante que o número de vagas seja inferior ao número de alunos, para ficar mais próximo do cenário brasileiro. Tanto as preferências dos alunos quanto as prioridades das escolas são randomizadas. Veja no apêndice as matrizes usadas na simulação e o resultado obtido.

Como existem muitos dados envolvidos, uma matriz de resultado 10x5 não oferece muita informação aos olhos humanos. Portanto, precisamos gerar indicadores para mensurar a diferença no resultado. Utilizaremos, então, as notas de corte e a existência de inveja justificada para comparar o resultado.

Se dois mecanismos diferentes geram notas de corte diferentes, aquele que gera notas de corte maiores é o mais adequado. Isto ocorre porque o único método de mensuração de qualidade dos alunos no Brasil é via prova, então assumimos que se a nota de corte aumenta, alunos com notas maiores estão ingressando em cada universidade, o que significa dizer, aos padrões de mensuração utilizados no Brasil, que melhores alunos estão entrando em cada universidade.

O resultado obtido é que as notas de corte são, em média 15,45% maiores no SOSM, conforme vemos nas tabelas abaixo.

Tabela 5.1 – Comparação das notas de corte entre SOSM e SISU na simulação 1

Notas de corte

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dia 1	0.734555	0.532172	0.744381	0.777387	0.641012	0.903306	0.839171	0.694377	0.808910	0.463672
dia 2	0.752358	0.714050	0.877926	0.906913	0.810539	0.919600	0.901075	0.844144	0.931890	0.765529
dia 3	0.941172	0.910908	0.908640	0.906913	0.754400	0.933111	0.917400	0.943725	0.931890	0.919511
dia 4	0.937384	0.749025	0.937203	0.948817	0.773240	0.930406	0.921739	0.908691	0.980420	0.919511
dia 5	0.941172	0.560526	0.90864	0.906913	0.77324	0.933111	0.9174	0.844144	0.98042	0.916298

Tabela 5.2 – Comparação das variações nas diversas simulações

Variação entre sistemas por simulação					
simulação 1	simulação 2	simulação 3	simulação 4	simulação 5	**Média**
10.55%	1.23%	28.52%	7.64%	29.30%	15.45%

Vale ressaltar que o resultado foi gerado em uma situação de 2 alunos por vaga. No último SISU, segundo dados do próprio website, a demanda foi de quase 18 alunos por vaga. Em um cenário deste tipo, em que o número de *rounds* necessários para alcançar o *matching* estável seja, provavelmente, bem maior, o aumento da nota de corte deve ser bem mais significativo.

Na tabela abaixo, vemos a nota de corte por cada dia de SISU. Encontramos um resultado esperado, quanto mais dias, mais próximo as notas de corte se tornam daquelas obtidas no SOSM

Tabela 5.2 – Comparação das notas de corte do SISU por dia, na simulação 1

Notas de corte

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dia 1	0.718482	0.684628	0.836179	0.661288	0.830046	0.899078	0.629673	0.805059	0.929839	0.700431
dia 2	0.774683	0.877955	0.910169	0.823593	0.955233	0.936213	0.919568	0.847105	0.934745	0.856440
dia 3	0.746029	0.919238	0.951885	0.929028	0.969847	0.936213	0.922065	0.805059	0.951386	0.350729
dia 4	0.718482	0.900856	0.963711	0.823593	0.969847	0.945391	0.886109	0.805059	0.965236	0.633928
dia 5	0.746029	0.809378	0.963711	0.823593	0.969847	0.936213	0.922065	0.823559	0.965236	0.809777

O outro indicador utilizado é o número de casos de inveja justificada, ou seja, o número de ocorrências em que um aluno preferia estar alocado em determinada escola, mas não está; ao mesmo tempo em que há outro aluno alocado nesta escola com uma prioridade menor do que o primeiro. O SOSM garante, por conta de sua metodologia, que o número de casos de inveja justificada seja zero. O código faz com que os alunos ajam racionalmente e este resultado será verdadeiro, diferente do experimento com pessoas reais, como em Chen e Sönmez (2006) e Calsamiglia et al (2009). Para o SISU, todavia, o código não garante este resultado.

Na simulação, houve, em média, um total de 56,6 casos de inveja justificada, com 39,4 alunos diferentes. A razão de estes números serem distintos é que pode ocorrer de o mesmo aluno ter inveja justificada em duas escolas distintas. Assim sendo, temos que 39, dos 100 alunos, se sentiram prejudicados com o resultado gerado pelo SISU. É um número muito relevante e que está associado com o comportamento estratégico que o SISU induz. Abaixo podemos ver o número de casos obtidos em cada simulação.

Tabela 5.3 – Casos de inveja justificada em casa simulação

Inveja justificada por simulação											
simulação 1		simulação 2		simulação 3		simulação 4		simulação 5		**Média**	
casos	alunos	casos	alunos	casos	alunos	casos	alunos	casos	alunos	casos	alunos
51	41	8	7	83	59	48	34	93	56	56.6	39.4

Destacamos dois exemplos tirados da simulação 1: o aluno 2, que ficou sem vaga no final, poderia ter conseguido vaga na escola 7, pois possui nota mais alta do que os alunos 37, 15 e 77; ao mesmo tempo, o aluno 11 conseguiu vaga na escola 3, mas preferia estar na escola 2 que, inclusive possui uma nota de corte inferior do que a nota do aluno 11, permitindo que os alunos 45 e 91, todos com notas inferiores do que o aluno 30 tenham conseguido vaga nesta escola.

O que causa todo esse problema é a restrição gerada pelo SISU. O mecanismo não consegue rodar *rounds* suficientes para alcançar o *matching* estável. A solução ideal é que não haja restrição, transformando o SISU no SOSM, só que isto pode ser inviável pelos custos envolvidos no servidor. Alternativas mais plausíveis seriam aumentar o número de inscrições por dia para cada aluno ou aumentar o número de dias. Ambas permitem que mais rounds ocorram, tornando o resultado cada vez mais próximo do desejado.

Conclusão

Este trabalho buscou estudar o método utilizado no Brasil para propor novas soluções. Contudo, reconhecemos o esforço empregado pelo governo na criação do SISU, que já é um grande avanço se comparado ao que tinha antigamente.

O ideal é que as simulações fossem feitas em tamanho real, para obter resultados ainda mais conclusivos sobre o assunto. Há ainda a possibilidade de utilizar dados reais, em parceria com o Ministério da Educação, e obter resultados ainda melhores.

Há muito ainda para se estudar em relação à Teoria dos Matchings e esperamos que a grande exposição desta área pela premiação do prêmio Nobel de 2012 continue inspirando novos trabalhos como este, pois esta metodologia pode ajudar em diversas ocasiões.

Referências Bibliográficas

Abdulkadiroğlu A. e T. Sönmez (2003): “School choice: a mechanism design approach”, *American Economic Review*, 93, 3 729-47

Alcalde, J (1996): “Implementation of stable solutions to marriage problems”, *J. Econ. Theory,* 69, 240–254.

Calsamiglia C, G. Haeringer e F. Klijn (2009): “Constrained school choice: An Experimental Study”, *The American Economic Review,* 100 1860-1874

Chen, Y. e T. Sönmez (2006): “School choice: An experimental study”, *J. Econ. Theory* 127, 202–231.

Gale D. e L. S. Shapley (1962): “College Admissions and the Stability of Marriage” *American Mathematical Monthly,* 69, 9-15

Haeringer G. e F. Klijn (2009): “Constrained school choice”, *Journal of Economic Theory,* 144 1921-1947

Roth A (2008): “What have we learned from market design?”, *The Economic Journal,* 118, 285-310.

Roth A. e M. Sotomayor: “Two-Sided Matching: a study in Game-Theoretic Modeling and Analysis” *Cambridge: Cambridge University Press,* 1990

Sen, A. (1999): “Development as Freedom”, Oxford*: Oxford University Press*

Shapley, L e H. Scarf (1974): “On cores and indivisibility”, *Journal of Mathematical Economics,* 1, 23-28

Sotomayor M.(2012): “A further note on the college admission game”, *Journal of Game Theory, 41, 179-193*

Sisu-MEC (acessado em 13/11/2013):
http://sisu.mec.gov.br/tire-suas-duvidas

Supremo Tribunal Federal (2012) (acessado em 13/09/2013): STF confirma validade de sistema de cotas em universidade pública
http://www.stf.jus.br/portal/cms/verNoticiaDetalhe.asp?idConteudo=207003&caixaBusca=N

Vestibular Brasil Escola (acessado em 13/11/2013):
http://vestibular.brasilescola.com/enem/lista-adesao-enem.htm

Apêndice

- Alunos simulação 1

alunos	preferencias								
1	3	5	2	6	1	8	4	7	10	9
2	1	10	6	5	8	9	2	7	3	4
3	6	1	4	3	5	8	9	10	2	7
4	1	2	10	4	7	8	5	9	3	6
5	2	1	9	5	8	4	7	10	3	6
6	10	8	1	7	5	6	4	9	3	2
7	9	7	2	6	5	8	3	4	10	1
8	3	10	5	9	7	4	6	1	2	8
9	2	9	10	6	3	4	8	1	5	7
10	9	10	8	2	5	7	4	6	1	3
11	7	4	1	10	9	5	2	3	8	6
12	8	10	3	6	1	7	2	9	5	4
13	9	4	10	5	3	6	7	8	2	1
14	8	6	2	10	4	9	3	5	7	1
15	1	5	8	3	7	4	6	2	10	9
16	5	3	7	1	10	6	8	2	9	4
17	7	10	4	5	3	6	1	9	2	8
18	1	4	5	3	2	6	10	7	8	9
19	9	2	10	7	4	3	6	5	8	1
20	7	8	9	2	6	1	10	3	5	4
21	2	9	10	8	3	5	6	1	4	7
22	1	9	7	5	4	6	10	3	8	2
23	2	9	6	5	10	3	1	8	4	7
24	3	6	8	4	7	9	10	2	1	5
25	7	3	10	9	8	1	5	2	6	4
26	3	8	1	5	4	9	10	6	2	7
27	9	3	6	8	5	1	10	4	7	2
28	3	9	8	6	4	7	1	5	10	2
29	3	1	10	9	4	2	8	6	5	7
30	1	4	8	10	5	2	3	9	6	7
31	9	6	5	8	1	2	4	3	7	10
32	3	6	4	2	10	1	8	5	9	7
33	8	4	9	6	3	2	10	5	1	7
34	2	8	10	3	7	1	6	5	4	9
35	6	2	1	7	4	5	8	10	3	9
36	7	8	3	10	9	4	1	6	2	5
37	8	3	1	5	7	9	4	2	10	6
38	3	6	9	5	10	7	8	4	2	1
39	4	10	8	7	5	2	1	6	9	3
40	7	9	8	10	2	1	3	4	5	6
41	2	3	5	4	8	7	9	10	1	6
42	9	4	7	2	8	3	10	5	1	6
43	7	1	8	3	2	4	9	5	10	6
44	8	5	9	4	6	1	7	10	3	2
45	4	1	3	8	2	5	9	6	10	7
46	8	2	9	6	7	4	3	5	10	1
47	7	2	1	10	5	3	8	6	4	9
48	4	8	7	9	2	10	3	6	5	1
49	10	8	7	6	4	5	2	1	9	3
50	6	3	7	8	10	1	2	4	5	9
51	2	9	4	6	3	8	1	7	5	10
52	2	9	1	10	7	8	6	4	3	5
53	5	6	2	10	1	4	3	9	8	7
54	9	3	1	4	5	10	8	6	2	7
55	1	8	10	6	7	9	2	3	4	5
56	8	6	2	7	4	3	5	9	10	1
57	1	8	5	4	7	3	9	6	2	10
58	6	2	10	5	9	8	7	3	1	4
59	6	7	2	8	3	5	9	4	1	10
60	5	2	1	8	3	6	7	10	9	4
61	2	6	7	9	4	1	3	8	5	10
62	6	8	5	3	2	9	7	1	10	4
63	3	9	4	7	5	2	6	1	10	8
64	3	4	6	5	1	10	9	8	2	7
65	7	6	5	2	8	10	1	3	9	4
66	8	9	3	1	2	7	4	10	5	6
67	3	9	4	1	10	8	5	6	7	2
68	1	10	8	2	6	4	5	9	7	3
69	4	1	6	3	7	5	10	8	2	9
70	6	8	10	2	9	3	7	4	5	1
71	5	10	1	3	9	7	4	6	8	2
72	3	8	7	4	9	1	5	10	6	2
73	3	8	1	2	7	9	6	5	4	10
74	5	9	4	8	10	6	1	7	2	3
75	9	5	1	3	8	6	7	2	10	4
76	2	7	5	9	8	3	1	4	10	6
77	1	7	10	6	9	5	4	8	3	2
78	1	7	8	6	4	3	2	9	5	10
79	5	9	2	3	8	7	6	1	4	10
80	4	5	6	1	3	7	9	8	10	2
81	4	5	2	7	9	8	6	10	3	1
82	6	5	8	7	4	3	2	1	10	9
83	8	5	3	9	1	2	6	7	4	10
84	1	3	2	9	5	10	6	8	4	7
85	2	8	5	3	7	6	9	1	4	10
86	5	4	6	10	9	1	2	3	8	7
87	9	4	8	6	3	5	1	7	10	2
88	1	3	6	9	5	2	4	8	7	10
89	1	7	2	5	8	10	6	9	4	3
90	5	6	1	3	9	4	10	7	8	2
91	8	3	6	5	7	1	10	9	2	4
92	6	9	3	8	10	4	1	7	2	5
93	9	4	7	3	8	2	5	6	10	1
94	4	5	9	6	2	7	1	8	10	3
95	6	7	4	2	10	5	8	9	3	1
96	7	2	3	8	10	6	9	1	5	4
97	7	5	8	3	10	2	4	9	1	6
98	5	3	6	4	1	9	10	8	2	7
99	7	6	3	10	4	2	9	5	8	1
100	4	3	7	5	8	2	9	10	1	6

- Escolas simulação 1

escolas - prioridades																																												
1	82	76	69	78	8	90	96	62	24	52	7	63	1	86	51	59	53	39	14	100	84	93	58	19	83	60	44	22	66	9	57	41	99	61	94	6	47	26	11	34	33	18	31	98
2	3	90	100	59	26	86	11	55	69	37	84	79	32	70	98	81	30	43	16	94	65	80	25	74	6	44	42	45	49	72	99	66	58	92	96	91	9	4	1	50	93	14	34	19
3	2	11	21	88	18	40	50	4	65	23	100	35	71	5	27	7	15	47	52	44	83	31	91	63	16	32	69	93	98	10	79	42	28	61	41	26	48	17	80	29	8	56	55	72
4	65	27	93	64	46	35	49	67	43	42	6	59	61	19	9	5	58	18	31	68	28	48	71	87	81	55	17	7	82	56	90	80	77	73	8	85	89	60	4	94	66	20	39	21
5	12	51	57	70	100	29	49	21	41	28	31	5	50	78	8	26	75	76	11	1	73	54	99	58	86	89	77	98	33	38	9	32	25	3	45	97	36	2	18	63	44	66	55	87
6	54	95	57	35	97	96	64	83	38	49	23	92	33	46	58	10	16	5	32	53	45	71	9	20	62	17	76	29	88	99	14	48	77	98	87	37	55	12	52	18	69	82	41	90
7	86	90	80	97	2	37	19	16	52	15	77	95	99	44	56	57	45	50	42	20	36	73	10	14	17	27	26	33	93	54	30	8	67	53	88	84	91	96	74	75	79	38	39	28
8	46	21	64	79	38	54	28	47	96	43	15	17	77	42	83	49	34	2	57	84	13	36	35	24	72	48	73	50	12	69	66	14	80	97	59	5	94	55	33	87	23	93	4	85
9	42	62	58	52	84	90	5	94	18	99	75	72	67	64	70	24	55	32	43	8	66	81	26	6	80	3	93	29	71	69	17	95	45	57	47	12	20	7	50	27	22	53	37	61
10	100	47	7	46	40	19	99	80	60	2	45	56	37	78	32	16	91	17	13	21	88	38	18	33	63	22	75	95	79	92	97	59	39	83	48	89	71	74	93	51	35	86	41	24

42	74	35	77	92	20	43	72	70	38	15	46	71	4	10	65	28	68	29	45	2	30	49	5	91	17	64	23	36	37	56	80	21	85	67	54	25	88	95	13	87	73	12	32
39	24	77	62	21	82	8	7	51	5	64	12	85	83	78	52	10	88	97	28	76	18	35	68	27	75	89	60	15	31	40	20	73	36	13	22	2	53	38	87	47	41	54	71
58	45	68	54	82	13	97	86	96	22	14	43	1	76	66	60	94	92	34	39	53	95	51	84	99	67	6	62	49	19	38	46	77	70	33	24	9	37	25	30	64	36	81	78
57	54	79	95	24	13	98	37	26	11	70	99	86	33	78	36	32	100	76	38	22	12	75	29	63	45	52	74	10	14	84	34	47	96	16	15	41	1	3	83	53	72	91	40
53	19	88	13	10	52	96	68	30	92	34	16	71	74	90	69	6	7	47	20	62	61	37	39	84	46	94	91	79	93	64	95	14	22	42	65	24	59	43	56	48	15	17	35
91	80	56	42	36	59	72	22	19	2	61	28	86	81	4	79	51	65	40	89	7	26	8	85	13	34	100	39	27	1	94	74	67	93	63	3	75	70	24	43	50	25	78	21
87	40	1	63	46	72	98	66	34	65	29	82	83	51	3	21	31	5	92	58	68	18	78	47	55	7	9	41	32	100	70	4	13	61	89	12	6	59	23	49	69	76	48	25
91	65	60	62	98	88	16	26	68	63	52	100	31	1	56	81	39	78	89	53	75	40	95	45	19	22	20	11	67	37	99	41	58	8	6	92	9	30	51	27	70	74	90	44
73	59	36	96	46	87	38	79	51	63	31	89	23	88	21	44	48	1	82	78	25	4	49	60	98	33	34	41	10	92	35	16	2	83	15	76	19	14	30	39	9	65	11	68
23	11	61	87	15	14	25	49	30	44	4	28	62	64	67	6	43	55	20	34	5	72	76	42	65	3	57	94	73	98	69	50	77	52	68	8	54	29	85	53	82	58	84	31

48	89	16	79	75	55	97	50	81	3	40	27
56	61	29	46	33	48	23	17	63	57	95	67
75	73	90	20	89	57	85	87	3	59	74	12
23	44	92	88	25	30	62	50	2	97	51	69
83	67	72	23	27	82	81	4	60	85	80	40
30	60	47	84	66	44	68	15	11	73	31	6
71	22	81	60	43	94	11	24	64	35	62	85
10	61	71	7	86	82	29	3	18	76	32	25
40	28	85	74	97	86	77	100	56	91	54	13
90	1	81	27	66	10	36	12	96	26	70	9

- Resultado simulação 1

SOSM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	14	42	66	34	84	88	22	71	77
60	37	18	65	98	97	45	11	85	19
70	10	15	20	13	30	76	21	31	90
35	33	6	4	16	72	54	91	95	93
2	80	67	52	79	47	55	38	73	49

SISU

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	14	42	65	34	84	88	22	85	77
60	33	18	20	98	97	45	11	31	19
30	80	15	4	13	47	76	21	95	90
35	81	6	52	16	83	54	91	73	93
66	53	44	78	79	36	55	38	100	89